

# ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ТІЛА, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПОСТУПАЛЬНО

## План заняття

1. Закони Ньютона
2. Імпульс тіла
3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння
4. Пружні сили
5. Сили тертя

## 2.1. Закони Ньютона

*Динаміка* - це розділ механіки, в якому вивчаються причини появи прискорення і розглядаються способи його обчислення.

Закони динаміки були відкриті 1687 р великим вченим І.Ньютоном (1642 – 1727). Сформульовані ним закону динаміки лежать в основі так званої класичної механіки. Закони Ньютона слід розглядати як узагальнення дослідних фактів. Висновки класичної механіки справедливі тільки при русі тіл з малими швидкостями, значно меншими швидкості світла  $c$ .

*Основне завдання динаміки* - визначення положення тіл в певний момент часу за відомими початковим положенням тіла, початковий швидкості і силам, діючим на тіло.

*Інерція* - явище збереження стану руху або спокою при відсутності зовнішніх впливів.

**Перший закон Ньютона:** Будь-яка матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху (по відношенню до інерціальної системі відліку) до тих пір, поки зовнішні впливи не змінять цього стану.

*Інерціальні системи відліку* - системи відліку, щодо яких тіло при компенсації зовнішніх впливів рухається рівномірно і прямолінійно (наприклад, геоцентрична і геліоцентрична системи).

*Маса* - це позитивна скалярна фізична величина, одна з основних характеристик матерії, визначає її інерційні та гравітаційні властивості. При однаковому впливі з боку оточуючих тіл одне тіло може швидко змінювати свою швидкість, а інше в тих же умовах - значно повільніше. Прийнято говорити, що друге з цих двох тіл має більшу інертність, або, іншими словами, друге тіло має більшу масу.

Маса тіла є адитивною величиною, тобто маса тіла або системи тіл складається з суми окремих частин системи. Маса не залежить від

положення тіла у просторі і швидкості тіла. У Міжнародній системі одиниць (СІ) маса тіла вимірюється в *кілограмах* (кг).

**Сила** - це векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює форму і розміри. Сила  $\vec{F}$  повністю задана, якщо вказані її модуль  $F$ , напрямління в просторі і точка докладання. Пряма, уздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили.

В загальному випадку сила залежить від положення тіла у просторі і від швидкості тіла. Сили підкоряються *принципу суперпозиції*.

Якщо на дане тіло діє одночасно кілька сил, то їх дію тіло можна замінити дією однієї сили - рівнодіючої

$$\vec{F}_{\text{рівн}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.2.1)$$

**Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона).**

Рівнодіюча сил, прикладених до тіла, дорівнює добутку маси тіла на надане йому прискорення.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.2.2)$$

де  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  - геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку;  $m$  - маса,  $\vec{a}$  - прискорення;  $N$  - число сил, діючих на точку; в координатній формі

$$ma_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}; ma_y = \sum_{i=1}^N F_{yi}; ma_z = \sum_{i=1}^N F_{zi}, \quad (1.2.3)$$

де під знаком суми стоять проекції сил на відповідні осі координат.

Напрямок прискорення завжди збігається з напрямком рівнодійної сили.

Якщо векторна сума сил, що діють на тіло, дорівнює нулю, тіло або покоїться, або рухається рівномірно і прямолінійно.

Сила в Міжнародній системі одиниць вимірюється в *ньютоних* (Н). Сила в 1 Н надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с<sup>2</sup>.

**Третій закон Ньютона.** Тіла діють один на одного з силами, спрямованими уздовж однієї і тієї ж прямої, рівними за абсолютним значенням і протилежними за напрямком. Сили прикладені до різних тіл і мають одну природу (рис. 1.2.1).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.2.4)$$

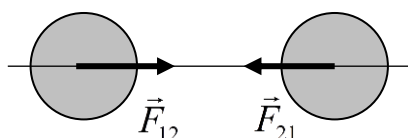
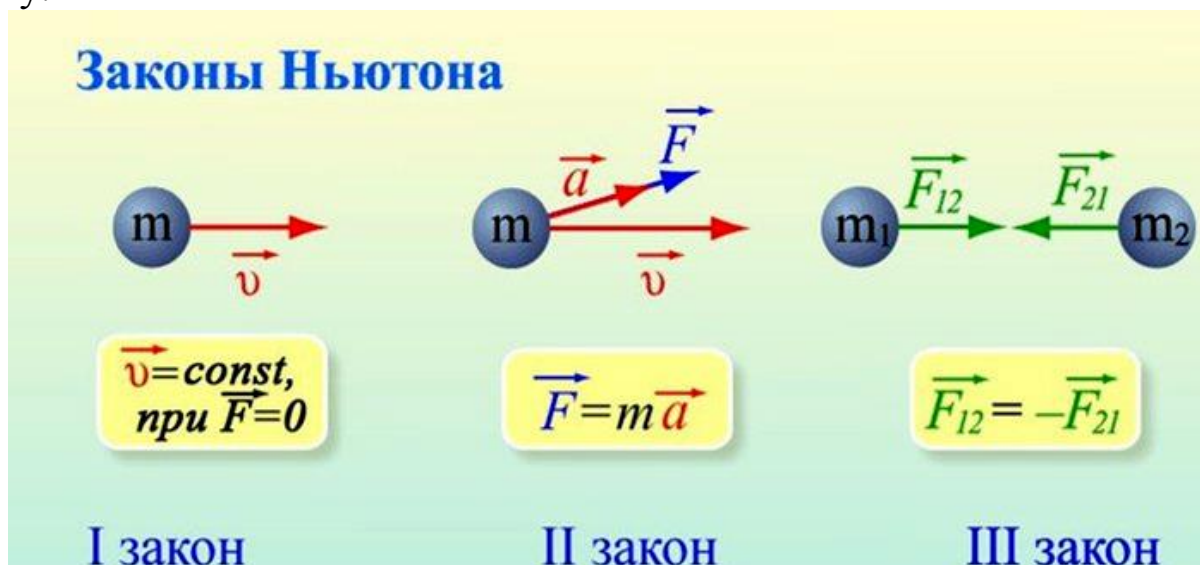


Рис. 1.2.1. Сили при взаємодії двох тіл

Закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку.



## 1.2.2. Імпульс тіла

Імпульс (кількість руху) тіла – векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.2.5)$$

Імпульс тіла є являється адитивною величиною. Напрямок вектора імпульсу збігається з напрямком вектора швидкості. Одиниця виміру імпульсу - кг · м/с.

*Закон збереження імпульсу.*

Геометрична сума імпульсів тіл, що складають замкнуту систему, залишається постійною при будь-яких взаємодіях тіл цієї системи між собою

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const} \quad (1.2.8)$$

або 
$$\sum_{i=1}^N m\vec{v}_i = \text{const} \quad (1.2.9)$$

де  $N$  - число матеріальних точок (або тіл), що входять до системи.

*Замкнута система* - система тіл, для якої рівнодіюча зовнішніх сил дорівнює нулю.

Закон збереження імпульсу є наслідком *однорідності простору*: при паралельному перенесенні у просторі замкнутої системи тіл як цілого її фізичні властивості не змінюються (не залежать від вибору положення початку координат інерціальної системи відліку).

Можна доказати, що із закону збереження імпульсу виводяться три закони Ньютона.

Так, рівняння руху матеріальної точки може бути представлено у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (1.2.6)$$

або 
$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t, \quad (1.2.7)$$

де  $\vec{F}\Delta t$  – імпульс сили, тобто добуток сили на час її дії.

Зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі і відбувається по напрямку тієї прямої, по якій ця сила діє.

На дії закону збереження імпульсу заснований реактивний рух. У ракеті при згорянні палива газів, нагріті до високої температури, викидаються з сопла з великою швидкістю  $u$  щодо ракети. Позначимо масу викинутих газів через  $m$ , а масу ракети після витікання газів через  $M$ . Тоді для замкнутої системи «ракета + газів» на підставі закону збереження імпульсу можна записати

$$V = -\frac{m}{M}u, \quad (1.2.10)$$

де  $V$  – швидкість ракети після витікання газів.

У даному випадку передбачається, що початкова швидкість ракети дорівнювала нулю. Отримана формула для швидкості ракети справедлива лише за умови, що вся маса згорілого палива викидається з ракети одночасно. Насправді витікання відбувається поступово протягом всього часу прискореного руху ракети. Кожна наступна порція газу викидається з ракети, яка вже придбала деяку швидкість.

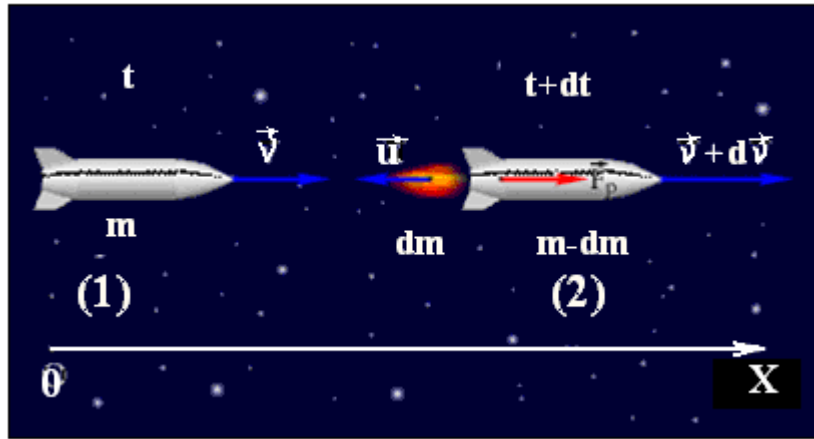


Рис. 1.2.2. Реактивний рух

Для отримання точної формули процес закінчення газу з сопла ракети потрібно розглянути більш детально. Нехай ракета в момент часу  $t$  має масу  $m$  і рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  (рис. 1.2.2).

Протягом малого проміжку часу  $dt$  з ракети буде викинута деяка порція газу з відносною швидкістю  $\vec{u}$ . Ракета в момент  $t+dt$  буде мати швидкість  $\vec{v} + d\vec{v}$ , а її маса стане рівною  $m+dm$ , де  $dm < 0$ . Маса викинутих газів буде, очевидно, дорівнювати  $-dm > 0$ . Швидкість газів в інерціальній системі  $OX$  дорівнюватиме  $\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}$ . Застосуємо закон збереження імпульсу. У момент часу  $t+dt$  імпульс ракети дорівнює  $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$ , а імпульс газів, що випускаються, дорівнює  $(-dm)(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u})$ . У момент часу  $t$  імпульс всієї системи дорівнював  $m\vec{v}$ . Припускаючи, що система «ракета + газ» замкнена, можна записати:

$$m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}). \quad (1.2.11)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо після скорочення

$$md\vec{v} = \vec{u}dm \quad (1.2.12)$$

або 
$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{u}. \quad (1.2.13)$$

За допомогою математичної операції інтегрування з цього співвідношення можна отримати формулу для кінцевої швидкості  $\vec{v}$  ракети:

$$\vec{v} = \ln \frac{m_0}{m} \cdot \vec{u}, \quad (1.2.14)$$

де  $\frac{m_0}{m}$  - відношення початкової та кінцевої мас ракети. Ця формула називається *формулою Циолковського*. З неї випливає, що кінцева швидкість ракети може бути більше, ніж швидкість витікання газів. Але це може бути досягнуто тільки шляхом витрати значної маси палива, що становить більшу частку первісної маси ракети.

Зауважимо, що в окремих випадках закон збереження імпульсу можна застосовувати і для реальних систем, які, зазвичай, є незамкненими. Наприклад, застосовувати закон збереження імпульсу незамкненої системи тільки на дану координатну вісь.

### 1.2.3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння

Будь-який рух тіла визначається чотирма фундаментальними взаємодіями в міру зростання: гравітаційним; слабким; електромагнітним; сильним.

Усі механічні явища в макросвіті визначаються електромагнітними і гравітаційними взаємодіями.

*Центральними* називаються сили, які всюди спрямовані уздовж прямих, що проходять через одну і ту ж нерухому точку - центр сил, і залежать тільки від відстані до центру сил.

Як показує порівняння, гравітаційні сили є слабкіші з усіх фундаментальних взаємодій, однак вони мають властивості адитивності (сумуються) і досягають значних величин в космічному масштабі (тяжіння Місяця, будова Сонячної системи і т.п.). Разом з кулонівськими силами, які визначають взаємодію між електричними зарядами, гравітаційні сили являються *фундаментальними*.

Закон всесвітнього тяжіння, відкритий І.Ньютоном у 1667 році, має вигляд

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.2.15)$$

де  $F$  - сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок;  $m_1$  і  $m_2$  - їх маси;  $r$  - відстань між точками;  $G$  - гравітаційна стала, яка чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок масою 1 кг кожна, що знаходяться на відстані 1 м одна від одної;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ .

У написаній формі закон всесвітнього тяжіння можна також застосовувати до взаємодії сферичних тіл, маса яких розподілена

сферично симетрично. У цьому випадку  $r$  є відстань між центрами мас сфер.

Маса тіла є не тільки мірою інертності тіла, але і мірою його гравітаційних взаємодій.

*Сила тяжіння*  $F_T$  - сила, що діє на тіло масою  $m$ , яке перебуває на відстані  $h$  від поверхні Землі

$$F_T = G \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2} = mg, \quad (1.2.16)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння. (Без урахування обертання Землі та її сплюснутості біля полюсів при  $h \ll R_3$   $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ).

### 1.2.4. Пружні сили

Роздивимось деякі сили, які являються наслідками фундаментальних сил. К ним належать сили пружності, сили тертя, деякі інші.

При деформації тіла виникає сила, яка прагне відновити колишні розміри і форму тіла. Ця сила виникає внаслідок електромагнітної взаємодії між атомами і молекулами речовини. Її називають силою пружності.

*Сила пружності* - сила, що виникає при деформації тіла і спрямована протилежно напрямку зміщення частинок при деформації.

Під деформаціями ми розуміємо будь-які зміни розмірів і форми тіла. Вони бувають двох видів.

*Пластичні деформації* - такі деформації, які не зникають після припинення дії зовнішніх сил.

*Пружні деформації* - такі деформації, які зникають після припинення дії зовнішніх сил.

Найпростішим видом деформації є деформації розтягування і стиснення (рис. 1.2.3). Зовнішня сила  $\vec{F} = -\vec{F}_i \delta$ .

При малих деформаціях ( $|x| \ll l$ ) сила пружності пропорційна деформації тіла і спрямована в бік, протилежний напрямку переміщення частинок тіла при деформації

$$F_x = F_{\text{пр}} = -kx. \quad (1.2.17)$$

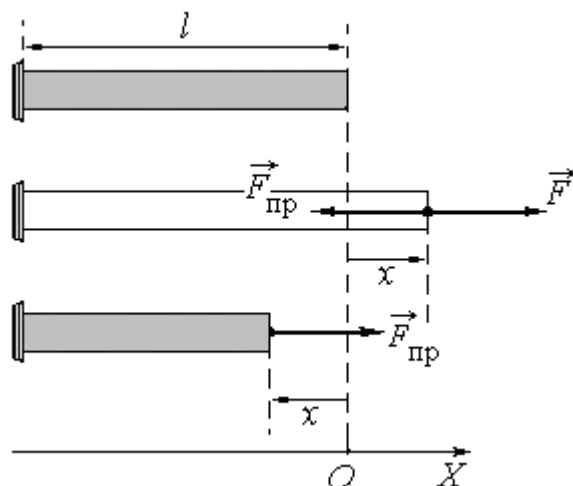


Рис. 1.2.3. Деформація розтягування ( $x > 0$ ) і стиснення ( $x < 0$ )

Співвідношення (1.2.17) виражає експериментально встановлений закон Гука. Коефіцієнт  $k$  називається жорсткістю тіла. В СІ жорсткість вимірюється в ньютонах на метр (Н/м). Жорсткість залежить від форми і розмірів тіла, а також від його матеріалу.

Для деформації розтягування або стиснення закон Гука прийнято записувати в іншій формі. Введемо відносну деформацію при поздовжньому розтягуванні або стисненні тіла у вигляді

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0}, \quad (1.2.18)$$

де  $\varepsilon$  – відносне подовження (стиск);  $x$  – абсолютне подовження;  $l_0$  – початкова довжина тіла.

Нормальна напруга характеризує дію сили на дане тіло

$$\sigma = \frac{F_{\text{пр}}}{S}, \quad (1.2.19)$$

де  $F_{\text{пр}}$  – пружна сила, перпендикулярна поперечному перерізу;  $S$  – площа цього перерізу,  $[\sigma] = \text{Н/м}^2$ .

Тоді закон Гука можна сформулювати так: відносна деформація  $\varepsilon$  пропорційна нарузі  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (1.2.20)$$

Коефіцієнт  $E$  в цій формулі називається модулем Юнга. Модуль Юнга залежить тільки від властивостей матеріалу і не залежить від розмірів і форми тіла. Модуль Юнга різних матеріалів змінюється в



широких межах. Для сталі, наприклад,  $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ , а для гуми  $E \approx 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ , тобто на п'ять порядків менше.

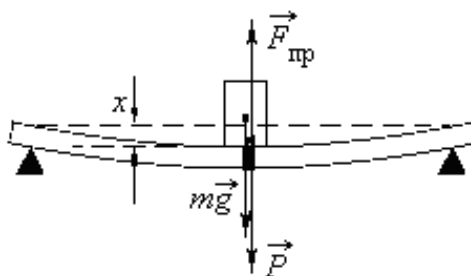


Рис. 1.2.4. Деформація вигину.

Закон Гука може бути узагальнений і на випадок більш складних деформацій. Наприклад, при деформації вигину пружна сила пропорційна прогину стрижня, кінці якого лежать на двох опорах (рис. 1.2.4).

Пружну силу, діючу на тіло з боку опори (або підвісу), називають силою реакції опори. При зіткненні тіл сила реакції опори спрямована перпендикулярно поверхні зіткнення. Тому її часто називають силою нормального тиску. Якщо тіло лежить на горизонтальному нерухомому столі, сила реакції опори спрямована вертикально вгору і врівноважує силу тяжіння:  $\vec{N} = -m\vec{g}$ . Сила, з якою тіло діє на стіл, є вага тіла  $P$ .

В загальному випадку, вагою називають силу, з якою тіло внаслідок притягання до Землі діє на опору, (або підвіс), що втримує тіло від вільного падіння.

У техніці часто застосовуються спіралеподібні пружини (рис. 1.2.5). При розтягуванні або стисненні пружин виникають пружні сили, які також підпорядковуються закону Гука. Коефіцієнт  $k$  називають жорсткістю пружини. У межах застосовності закону Гука пружини здатні сильно змінювати свою довжину. Тому їх часто використовують для вимірювання сил. Пружину, розтягання якої градують в одиницях сили, називають динамометром. Слід мати на увазі, що при розтягуванні або стисненні пружини в її витках виникають складні деформації кручення і вигину.

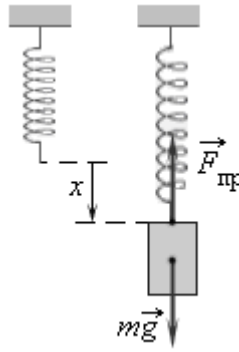


Рис. 1.2.5. Деформація розтягування пружини.

На відміну від пружин і деяких еластичних матеріалів (гума) деформація розтягу або стиску пружних стрижнів (або дротів) підкоряються лінійному закону Гука в дуже вузьких межах. Для металів відносна деформація  $\varepsilon = \frac{x}{l_0}$  не повинна перевищувати 0,01.

При великих деформаціях виникають незворотні явища (плинність) і руйнування матеріалу.

#### *Приклади сил пружності*

Сила реакції опори  $N$  – сила пружності, що діє на тіло з боку опори перпендикулярно до її поверхні.

Сила натягу ( $F_H$  або  $T$ ) – сила пружності, що діє на тіло з боку нитки або пружини.

Вага тіла  $P$  – сумарна сила пружності, що діє при наявності сили тяжіння на всі опори, підвіси.

За III законом Ньютона:  $\vec{P} = -\vec{N}$ .

### 1.2.5. Сили тертя

Сили тертя – сили, яки виникають при зіткненні поверхонь тіл, що перешкоджають їх відносному переміщенню, і спрямовані уздовж поверхні зіткнення. Вони мають електромагнітного природу.

Сила тертя спокою  $F_{T0}$  – сила тертя, що перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого. У стані спокою  $\vec{F}_{\partial 0} = -\vec{F}$ .

$$F_{T0} = \mu_0 N, \quad (1.2.21)$$

де  $\mu_0$  – коефіцієнт тертя спокою,  $N$  – сила нормального тиску.

Сила тертя ковзання – сила тертя, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, завжди спрямована в бік, протилежний відносно швидкості тіл, що стикаються

$$F_T = \mu N, \quad (1.2.22)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя ковзання ( $\mu < \mu_0$ ).

Коефіцієнти тертя - безрозмірні величини, які залежать від виду матеріалів тіл і характеру поверхонь, що труться.

На рис. 1.2.6 представлена залежність сили тертя від прикладеної сили ( $F_{\text{тер}0\text{max}}$  - максимальне значення сили тертя спокою).

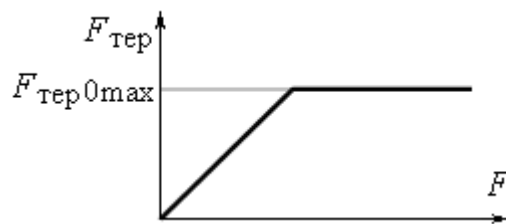


Рис. 1.2.6 – Сила тертя спокою і сила тертя ковзання

## Завдання для самопідготовки

1. Що вивчає динаміка?
2. Сформулюйте закони Ньютона.
3. Що таке інерція, інерціальні системи відліку?
4. Що таке сила?
5. Дайте означення імпульсу тіла.
6. Як формулюється закон збереження імпульсу? Наведіть приклади його використання.
7. Які є види взаємодій?
8. Закон Всесвітнього тяжіння?
9. Що таке сила пружності. Види деформацій?
10. Що таке сила тертя?

Задача 1. Похила площина, що утворює кут  $\alpha = 25^\circ$  з площиною горизонту, має довжину  $l = 2$  м. Тіло, що рухалось рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час  $t = 2$  с. Визначити коефіцієнти тертя  $\mu$  тіла про площину.

*Відповідь:* 0,35

Задача 2. Автомобіль з вантажем масою 5 т проходить по випуклому мосту зі швидкістю 36 км/год. З якою силою він тисне на середину мосту, якщо радіус кривизни моста 50 м?

*Відповідь:* 39 кН.

Задача 3. Автоцистерна з гасом рухається з прискоренням  $a = 0,7$  м/с<sup>2</sup>. Під яким кутом  $\alpha$  до площини горизонту розташований рівень гасу в цистерні?

*Відповідь:*  $\approx 4^\circ$

Задача 4. Автомобіль йде по заокругленню шосе, радіус  $R$  кривизни якого дорівнює 200 м. Коефіцієнт тертя  $\mu$  коліс об покриття дороги дорівнює 0,1 (ожеледь). При якій швидкості  $v$  автомобіля почнеться його занос?

*Відповідь:* 14 м/с.

Задача 5. Автопоїзд, що рухається з постійною швидкістю 0,2 м/с, завантажують щебенем. Швидкість завантаження постійна і становить 200 кг/с. Знайти силу тяги двигуна автопоїзда.

*Відповідь:* 40 Н.